任意整數二階遞迴關係式模質數之同餘性質

何芯誼

研究動機

在數列中有許多特別、有規律的遞迴關係式，在閱讀相關文章後，其中讓我們十分有興趣的是同餘性質，同餘性質主要探討餘數的關係，而在這本書中曾提到 $L_p \equiv 1 (\bmod\ p)$，此部分代表若 p 為質數，第 p 項的盧卡斯數除以 p 餘數必為 1，這個概念使我們印象刻，進而探討是否這樣的概念能引用至所有任意的二階遞迴關係式？因此開始我們的研究。

文獻探討

針對接下來的研究，以下為未來的討論前置作業

$\boxed{\text{定理一}}$ *Lucas* 定理 $C_n^p \equiv 0(\bmod\ p)$ 已知 $C_n^p = \frac{p!}{n!(n-p)!} = p\left[\frac{(p-1)!}{n!(n-p)!}\right]$ 可容易得知此為p的倍數，故定理一成立

$\boxed{\text{定理二}}$ 二項式定理：$(x+y)^n = \sum_{k=1}^{n} C_k^n x^k y^{n-k}$

$\boxed{\text{定理三}}$ 費馬小定理：若 $a, p \in \mathrm{N}$ 且 p 為質數，則 $a^p \equiv 1(\bmod\ p)$

研究目的

一、文獻探討盧卡斯數模質數之同餘性質

二、探討二階遞迴關係式的一般項在特定狀況的性質

三、探討特定情況下任意整數二階遞迴關係式模質數之同餘性質

研究內容

一、整數二階遞迴關係式特例：盧卡斯數(*Lucas number*)

本篇研究一開始以整數二階遞迴關係式進行討論，因此在選擇數列討論時以較為常見且簡單的數列-盧卡斯數(*Lucas number*)為討論內容，因此以下為相關定義

[定義一]盧卡斯數由 1 和 3 開始，其後的數皆由前兩項組成。遞迴關係式為 $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$，進而能得到特徵方程式 $X^2 = X + 1$，設 α, β 是 $X^2 - X - 1 = 0$ 的兩根，則 $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases}$，則能得到其一般式為 $L_n = \alpha^n + \beta^n$。

而從此相關的定義中，我們嘗試整理出一個相關的相關的定理，如下：

$\boxed{\text{定理四}}$ $L_p \equiv {L_1}^p - \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{i} \cdot (-1)^i L_{p-2i} \equiv {L_1}^p \equiv 1\ (\bmod\ p)$

$\boxed{\text{定理五}}$ $L_{pn} \equiv {L_n}^p - \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} C_i^p \cdot (-1)^{ni} L_{p-2i} \equiv {L_n}^p \equiv L_n\ (\bmod\ p)$

二、任意二階整數遞迴關係式討論

[定義二]任意整數二階遞迴關係式 $K_n = \alpha K_{n-1} + \beta K_{n-2}$，$\alpha, \beta \in Z$ 且 $K_n = \lambda_1{}^n + \lambda_2{}^n$，其中 λ_1, λ_2 為二次方程式

$x^2 - \alpha x + \beta = 0$ 之兩根，則 $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \alpha \\ \lambda_1 \lambda_2 = \beta \end{cases}$，由以上定義二的內容，我們可以容易得知 $K_0 = 2, K_1 = \alpha$ $K_0 = 2, K_1 = \alpha$。

定理六 在滿足任意整數二階遞迴關係式 $K_n = \alpha K_{n-1} + \beta K_{n-2}$，$\alpha, \beta \in Z$ 且 $K_n = \lambda_1{}^n + \lambda_2{}^n$，當p為奇數時

$$K_p = \lambda_1{}^p + \lambda_2{}^p = (\lambda_1 + \lambda_2)^p - \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} \cdot (\lambda_1)^i (\lambda_2)^{p-i}$$

$$= K_1{}^p - \left[\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{i} \cdot (\lambda_1)^i (\lambda_2)^{p-i} + \sum_{i=\frac{p+1}{2}}^{p-1} \binom{p}{i} \cdot (\lambda_1)^i (\lambda_2)^{p-i} \right]$$

$$= K_1{}^p - \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{i} \cdot (\beta)^i K_{p-2i}$$

則由**定理一**、**定理三**可知：$K_p \equiv K_1{}^p - \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{i} \cdot (\beta)^i K_{p-2i} \equiv K^p \equiv \alpha \pmod{p}$

定理七 在滿足任意整數二階遞迴關係式 $K_n = \alpha K_{n-1} + \beta K_{n-2}$，$\alpha, \beta \in Z$ 且 $K_n = \lambda_1{}^n + \lambda_2{}^n$，當p為奇數時，$K_{pn} \equiv K_n (mod\ p)$

proof：

由二項式定理可知，

$$K_{pn} = \lambda_1{}^{pn} + \lambda_2{}^{pn} = (\lambda_1{}^n + \lambda_2{}^n)^p - \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} \cdot (\lambda_1{}^n)^i (\lambda_2{}^n)^{p-i}$$

$$= K_1{}^{pn} - \left[\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{i} \cdot (\lambda_1{}^n)^i (\lambda_2{}^n)^{p-i} + \sum_{i=\frac{p+1}{2}}^{p-1} \binom{p}{i} \cdot (\lambda_1{}^n)^i (\lambda_2{}^n)^{p-i}) \right]$$

$$= K_n{}^p - \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{i} \cdot (\beta)^{ni} K_{p-2i}$$

則由**定理一**、**定理三**可知：$K_{pn} \equiv K_n{}^p - \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{i} \cdot (\beta)^{ni} K_{p-2i} \equiv K_n{}^p \equiv K_n \pmod{p}$。■

由此，我們建立出對於任意項的情況都有相關的性質討論，也成功解決了一般化的情況。

結論

本篇研究從特定二階遞迴關係式出發，並且整理出一個簡易的性質為了針對更深入的廣義討論，我們嘗試假設出任意二階整數遞迴關係式的形式，期望其中的相關概念能有所規律，而在整理的過程中，我們確實發現其內容會和質數的相關項數有所關聯，也讓我們了解原來無論是什麼樣的遞迴關係式皆有一定的性質。